

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Charbella ABOU KHALIL

Forme normale de Birkhoff en faible régularité

Thèse présentée et soutenue à Nantes Université, le 24 septembre 2024
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs avant soutenance :

M. Emanuele HAUS Professeur associé, Università degli Studi Roma Tre
Mme. Katharina SCHRATZ Professeure des universités, Sorbonne Université

Composition du Jury :

	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (<i>à préciser après la soutenance</i>)
Président :	M. Rémi CARLES	Directeur de recherche CNRS, Université de Rennes, IRMAR
Examineurs :	M. Erwan FAOU	Directeur de recherche, Université de Rennes, INRIA & IRMAR
	M. Rafik IMEKRAZ	Professeur des universités, La Rochelle Université
Dir. de thèse :	M. Benoit GRÉBERT	Professeur des universités, Nantes Université
Co-dir. de thèse :	M. Joackim BERNIER	Chargé de recherche CNRS, Nantes Université

Titre : Forme normale de Birkhoff en faible régularité

Mot clés : Faible régularité ; stabilité des solutions ; non-résonance ; oscillateur harmonique quantique non linéaire ; méthodes de Splitting ; analyse retrograde

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude du comportement en temps longs des petites solutions des EDPs hamiltoniennes semi-linéaires non résonnantes en faible régularité. De nombreux résultats ont été réalisés pour montrer la stabilité en haute régularité (dans l'espace de Sobolev H^s avec s élevé). La contrainte était la régularité des solutions, qui semblait essentielle dans les preuves. Cependant, certains résultats numériques ont suggéré que nous pouvons observer une conservation en temps longs même sans l'hypothèse de régularité. Motivés par ces simulations, d'une part nous prouvons dans le

contexte des EDPs et en faible régularité, la presque préservation pour des temps très longs des actions bas de l'oscillateur harmonique quantique non linéaire avec des potentiels multiplicatifs. D'autre part, nous prouvons qu'après une discrétisation par des intégrateurs numériques symplectiques appliqués aux équations de Klein–Gordon non linéaires, les super-actions sont presque préservées pour des temps très longs. Cela explique partiellement les observations numériques. Ces résultats sont des conséquences dynamiques de la forme normale de Birkhoff en faible régularité.

Title: Birkhoff normal form in low regularity

Keywords: Low regularity; stability of solutions; non-resonance; nonlinear quantum harmonic oscillator; Splitting methods; backward error analysis

Abstract: This thesis is devoted to the study of the long time behavior of small solutions of semi-linear non-resonant Hamiltonian PDEs in low regularity. Many results were realised to prove long time stability in high regularity (in the Sobolev space H^s with s large). The main constraint was the smoothness of the solutions which seemed to be essential in the proofs. However, some numerical results suggested that this constraint can be relaxed, i.e. we can view long time conservation even without the regularity assumption. Motivated

by these simulations, we prove first in the PDE context and in low regularity, the almost preservation for very long times of the low actions of the nonlinear quantum harmonic oscillator with multiplicative potentials. Then, we prove that after applying symplectic numerical integrators to the nonlinear Klein–Gordon equations, the super-actions are almost preserved for very long times, thus partially explaining the numerical observations. These results are dynamical consequences of Birkhoff normal form in low regularity.