

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES HDR

NANTES UNIVERSITE

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Par

Paul-Eric CHAUDRU DE RAYNAL

« BAL(L)ADE ENTRE EDP ET PROBABILITÉ »

Travaux présentés et soutenus à Nantes, le 30 mai 2024

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray UMR CNRS 884;

Rapporteurs avant soutenance :

Franco Flandoli	Professor	Scuola Normale Superiore, Pisa
Kavita Ramanan	Professor	Brown University
Nizar Touzi	Professor	New York University

Composition du Jury :

Président :	François Bolley	Professeur des Universités	ENS Rennes
Examineurs :	Philippe Briand	Professeur des Universités	Université Savoie Mont Blanc
	François Delarue	Professeur des Universités	Université Côte d'Azur
	Franco Flandoli	Professor	Scuola Normale Superior, Pisa
	Arnaud Guillin	Professeur des Universités	Université Clermont Auvergne
	Frédéric Herau	Professeur des Universités	Nantes Université
	Kavita Ramanan	Professor	Brown University
	Nizar Touzi	Professor	New York University

Titre : Bal(l)ade entre EDP et Probabilité

Mots clés : EDS, EDP, résolubilité, schéma numérique, McKean-Vlasov, champ moyen, propagation du chaos

Résumé : Ce manuscrit vise à retracer une partie des travaux effectués depuis ma soutenance de thèse au LJAD, à l'université de Nice Côte d'Azur, poursuivis durant mon affectation au LAMA à l'Université Savoie Mont Blanc puis au LMJL à Nantes Université. Ces travaux s'inscrivent dans le domaine de l'analyse stochastique et se situent, de fait, à la frontière de la théorie des probabilités (plus particulièrement celle des Équations Différentielles Stochastiques, EDS) et des Équations aux Dérivées Partielles, EDP.

Deux grandes classes d'EDS y sont abordées : les EDS "classiques" dont les coefficients sont peu réguliers, voire singuliers; les EDS de McKean-Vlasov, qui ont la particularité d'intégrer la loi de sa solution à l'équation. Dans tous les cas, les EDP associées sont étudiées.

Il s'agit d'EDP du second ordre, avec parfois une certaine structure non linéaire particulière, dont l'espace d'état sous-jacent est éventuellement augmenté de l'espace de Wasserstein.

Ces systèmes sont étudiés en grande partie du point de vue de la régularisation par le bruit, qui peut agir sous différentes formes. Il s'agit de comprendre comment les fluctuations du bruit de l'EDS permettent de s'affranchir des conditions de régularité usuelles pour garantir l'existence, et surtout l'unicité, d'une solution. Dans tous les cas, une étude fine de l'EDP associée s'avère cruciale. Pour la seconde classe, le manuscrit traite aussi d'une généralisation infinie dimensionnelle du problème de Skorokhod.

Title : Bal(l)ade entre EDP et Probabilité.

Keywords : SDEs, PDEs, numerical scheme, McKean-Vlasov, mean-field, propagation of chaos

Abstract : This manuscript aims to trace part of the works done since my thesis defense at LJAD, Université Nice Côte d'Azur, continued during my assignment at LAMA, Université Savoie Mont Blanc, and then at LMJL, Nantes Université. This work falls within the field of stochastic analysis and lies at the intersection of probability theory (especially Stochastic Differential Equations, SDEs) and Partial Differential Equations, PDEs.

Two main classes of SDEs are addressed: "classical" SDEs with coefficients that are irregular or even singular, and McKean-Vlasov SDEs, which have the peculiarity of involving the law of their solution into the equation. In all cases, the associated PDEs are studied.

These are second-order PDEs, sometimes with a specific nonlinear structure, whose underlying state space may be augmented with the Wasserstein space.

These systems are studied primarily from the perspective of regularization by noise, which can act in various forms. The aim is to understand how the noise fluctuations of the SDEs allow one to overcome the usual regularity conditions to ensure the existence, and especially the uniqueness, of a solution. In all cases, a detailed study of the associated PDE is crucial. For the second class, the manuscript also deals with an infinite-dimensional generalization of the Skorokhod problem.

