Université de Nantes - IUT de Saint Nazaire

Département de Mesures Physiques

Devoir surveillé de Traitement des Signaux de Mesure

DUT MP - Semestre 4 - 2011/2012 - durée : 1 heure 30

Les trois exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la qualité de la présentation des résultats. Si vous joignez cet énoncé à votre copie, indiquez ci-dessous votre nom, prénom et groupe.	
nom, prénom	groupe

1. **(6 points)**
   (a) Si f est la fréquence d'un signal sinusoïdal, combien y a t-il de périodes de cette sinusoïde par seconde ?
   (b) Si cette sinusoïde est échantillonnée à la fréquence d'échantillonnage F_e, combien y a t-il d'échantillons par seconde ?
   (c) Combien y a t-il d'échantillons par période de la sinusoïde, et quelle est la relation entre ce nombre d'échantillons par période et la fréquence normalisée $\lambda = f/F_e$? Pour que cette sinusoïde soit correctement échantillonnée, comment cette fréquence normalisée et comment ce nombre d'échantillons par période doivent-ils être ?
   (d) Si le signal $x(t) = 5\,\sin(80\pi\,t) + 3\,\sin(160\pi\,t) + 2\,\sin(320\pi\,t)$ est échantillonné à une cadence de 140 échantillons par seconde, la condition de Shannon est-elle respectée ? Les trois composantes sinusoïdales du signal sont-elles modifiées par l'échantillonnage ? Quelle est la période du signal avant et après échantillonnage ?

2. **(5 points)**
   Une chaîne d'acquisition de signaux de mesure utilise un convertisseur analogique-numérique bipolaire qui convertit une tension v_e comprise entre -10 et $+10$ V en un nombre N codé en notation en complément à deux sur 10 bits, en utilisant une loi de quantification par arrondi.
   (a) Quel est l'intervalle des valeurs possibles de N ? Quelle est la valeur du pas de quantification ?
   (b) À partir de N, le système informatique placé à la fin de la chaîne d'acquisition calcule $v_s = N\,q$, qui est la version quantifiée de v_e. Quelles sont les valeurs de N et de v_s pour $v_e = 2$ V, $v_e = -3$ V et $v_e = 12$ V ?
   (c) Si le signal appliqué à l'entrée du convertisseur est $v_e(t) = 5\,\sin(80\pi\,t)+3\,\sin(160\pi\,t)+2\,\sin(320\pi\,t)$, quelle est la valeur (en dB) du rapport signal sur bruit de quantification ? Ce signal va t-il subir de la distorsion par saturation ?

3. **(9 points)**
   À partir d'un signal à temps discret $x[n]$ obtenu par échantillonnage à la période T_e d'un signal $x(t)$, on construit les deux signaux $y_{m5}[n]$ et $y_{m3}[n]$ par les relations

$$\begin{aligned} y_{m5}[n] &= \frac{1}{5}\,(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]) \\ y_{m3}[n] &= \frac{1}{3}\,(x[n-1] + x[n-2] + x[n-3]) \end{aligned}$$

   On appellera S_{m5} le système d'entrée $x[n]$ et de sortie $y_{m5}[n]$ et S_{m3} le système d'entrée $x[n]$ et de sortie $y_{m3}[n]$.
   (a) Calculer les gains statiques de ces deux systèmes et analyser les résultats obtenus.

(b) Calculer les gains de Nyquist de ces deux systèmes et analyser les résultats obtenus.

(c) Calculer les réponses fréquentielles $H_{m5}(\lambda)$ et $H_{m3}(\lambda)$ de ces deux systèmes.

(d) Soit $y[n]$ le signal défini par la relation

$$y[n] = \frac{1}{5}\left(\alpha\, x[n] + (\alpha + \frac{5}{3}\beta)\, x[n-1] + (\alpha + \frac{5}{3}\beta)\, x[n-2] + (\alpha + \frac{5}{3}\beta)\, x[n-3] + \alpha\, x[n-4]\right),$$

où α et β sont deux paramètres réels. On appellera S le système d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$. Quelle est la relation entre $y[n]$, $y_{m5}[n]$ et $y_{m3}[n]$?

(e) En déduire que la réponse fréquentielle $H(\lambda)$ de ce troisième système est égale à

$$H(\lambda) = \left(\alpha\, \frac{\sin(5\pi\lambda)}{5\, \sin(\pi\lambda)} + \beta\, \frac{\sin(3\pi\lambda)}{3\, \sin(\pi\lambda)}\right)\, e^{-\jmath 4\pi\lambda}$$

(f) En utilisant un développement limité au second ordre et au voisinage de zéro de $\sin(Kx)/(K\sin(x))$,

$$\frac{\sin(Kx)}{K\sin(x)} \approx 1 - \frac{K^2-1}{6}\, x^2$$

déterminer les valeurs de α et β pour que $H(\lambda)$ soit approximativement égale, en basse fréquence, à la réponse fréquentielle de la version retardée de deux périodes d'échantillonnage d'un double dérivateur,

$$H_{d2}(\lambda) = (\jmath 2\pi\lambda)^2\, e^{-\jmath 4\pi\lambda} = -4\pi^2\lambda^2\, e^{-\jmath 4\pi\lambda}.$$

Correction DS Traitement du Signal

F. Auger, 22 mars 2012 (1)

Si $T=\frac{1}{f}$ est la période, le nombre de périodes par seconde est tel que $NT=1$, soit $N=1/T$, soit $N=f$

exo 1

a) Par définition, la fréquence d'une sinusoïde correspond au nombre de périodes de cette sinusoïde dans une seconde.

Donc si la fréquence est f, le nombre de périodes par seconde est égal à f

b) Par définition, la fréquence d'échantillonnage correspond au nombre d'échantillons par seconde.

Donc si la fréquence d'échantillonnage est Fe, le nombre d'échantillons par seconde est égal à Fe

c) Si il y a F_e échantillons par seconde (éch/s)

f périodes par seconde (per/s)

il y a donc Fe/f échantillons par période $\frac{\text{éch/s}}{\text{per/s}} = \frac{\text{éch}}{\text{per}}$

Donc si $\lambda = f/F_e$ est la fréquence normalisée de la sinusoïde

$\frac{Fe}{f} = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'échantillons par période

Pour que la sinusoïde soit échantillonnée correctement il faut vérifier la condition de Shannon $f < \frac{Fe}{2}$ donc $\lambda = \frac{f}{Fe} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{\lambda} > 2$

d) $x(t) = 5\sin(80\pi t) + 3\sin(160\pi t) + 2\sin(320\pi t)$

$\sin(2\pi f t)$ sinusoïde de fréquence f

donc les fréquences de ces 3 sinusoïdes sont 40, 80 et 160 Hz

Une sinusoïde de fréquence 40 Hz échantillonnée à 140 Hz vérifie la condition de Shannon
$\Rightarrow$ tout va bien

Une sinusoïde de fréquence 80 Hz échantillonnée à 140 ne vérifie pas la condition de Shannon ($f > \frac{Fe}{2}$) donc la fréquence va être modifiée par repliement spectral

$$80 = 70 + 10 = \frac{Fe}{2} + \Delta f \text{ devient } \frac{Fe}{2} - \Delta f = 70 - 10 = 60\text{ Hz}$$

Une sinusoïde de fréquence 160 Hz échantillonnée à 140 Hz ne vérifie pas la condition de Shannon ($f > Fe$) donc la fréquence va être modifiée par translation fréquentielle

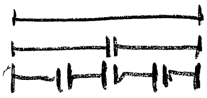
$$160 = 140 + 20 = Fe + \Delta f \text{ devient } \Delta f = 20\text{ Hz}$$

Donc après échantillonnage le signal est vu comme un autre signal

$x'(t) = 5\sin(80\pi t) + 3\sin(120\pi t) + 2\sin(40\pi t)$

soit la somme de 3 sinusoïdes de fréquence 20, 40 et 60 Hz

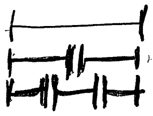
Avant échantillonnage $x(t)$ est la somme de 3 sinusoïdes de périodes $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{80} = \frac{1}{2}\frac{1}{40}$, $\frac{1}{160} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{40}$



donc ce signal est périodique de période $\underline{\frac{1}{40}\,s}$ avec un fondamental à <u>40 Hz</u>

Après échantillonnage $x(t)$ est vu comme la somme de 3 sinusoïdes de fréquence 40, 60 et 20 Hz, donc de période $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}$ et $\frac{1}{60} = \frac{1}{3}\frac{1}{20}$

donc ce signal est périodique de période $\underline{\frac{1}{20}\,s}$
avec un fondamental à <u>20 Hz</u>



C'est pas pareil !

Exo2

a) N est codé en notation en complément à 2 sur 10 bits, donc N est compris entre $-2^9 = -512$ et $+2^9 - 1 = 511$, ce qui fait $2^{10} = 1024$ valeurs

$$q = \frac{\Delta V}{2^n} = \frac{20}{2^{10}} = \frac{20}{1024} = 19,53 \text{ mV}$$

b) Pour $v_e = 2V$ $\quad N = \text{round}\left(\frac{V_e}{q}\right) = 102$ $\quad V_s = Nq = 1,992$ V

Pour $V_e = -3V$ $\quad N = -154$ $\quad V_s = -3,008$ V

Pour $V_e = 12V$ $\quad N = 511$ (saturation) $\quad V_s = 9,980$ V

c) Si $v_e(t) = V_{eff1}\sqrt{2}\sin(\omega_1 t) + V_{eff2}\sqrt{2}\sin(2\omega_1 t) + V_{eff3}\sqrt{2}\sin(4\omega_1 t)$

alors $V_{eff}^2 = V_{eff1}^2 + V_{eff2}^2 + V_{eff3}^2$

$$= \frac{25}{2} + \frac{9}{2} + \frac{4}{2} = \frac{38}{2} = 19 \Rightarrow V_{eff} = \sqrt{19}$$

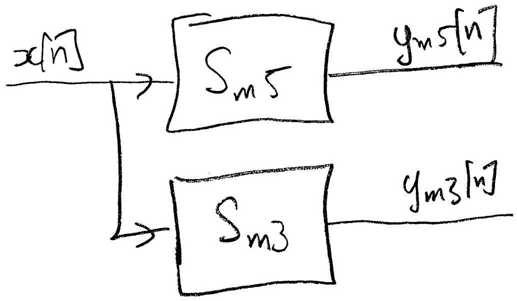
donc $RSB_q = \frac{19}{q^2/12} = \frac{12 \times 19}{20^2} 2^{20} = 5,97\ 10^5$

$RSB_q^{dB} = 10\log_{10}(RSB_q) = 57$ dB

$-1 < \sin(x) < 1$

donc $|v_e| < 5 + 3 + 2$

$|v_e| < 10 \Rightarrow$ pas de saturation



a) Si on est en statique $y_{m5}[n] = Y_{m5}$, $y_{m3} = Y_{m3}$, $x[n] = X$

donc $Y_{m5} = \frac{1}{5}(X+X+X+X+X) = X$ donc $G_{m5} = \frac{Y_{m5}}{X} = 1$

$Y_{m3} = \frac{1}{3}(X+X+X) = X$ donc $G_{m3} = \frac{Y_{m3}}{X} = 1$

Ces systèmes laissent passer les basses fréquences

b)

A la fréquence maximale $y_{m5}[n] = (-1)^n Y_{m5} = -y_{m5}[n-1] = y_{m5}[n-2] \ldots$

$y_{m3}[n] = (-1)^n Y_{m3} = -y_{m3}[n-1] = y_{m3}[n-2] \ldots$

$x[n] = (-1)^n X = -x[n-1] = +x[n-2] \ldots$

$y_{m5}[n] = \frac{1}{5}\left(x[n] - x[n] + x[n] - x[n] + x[n]\right) = \frac{1}{5}x[n]$ $G_{Nm5} = \frac{1}{5}$

$y_{m3}[n] = \frac{1}{3}\left(-x[n] + x[n] - x[n]\right) = -\frac{1}{3}x[n]$ $G_{Nm3} = -\frac{1}{3}$

c) Si $x(t) = X e^{j2\pi f t}$ $x[n] = x(nT_e) = X e^{j2\pi f T_e n} = X z^n$ avec $z = e^{j2\pi f T_e}$

$x[n-1] = X z^{n-1} = x[n] z^{-1}$

$x[n-2] = x[n] z^{-2}$

$y_{m5}[n] = \frac{1}{5}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}\right) x[n] = \frac{1-z^{-5}}{5(1-z^{-1})} x[n]$

$H_{m5}(\lambda) = \frac{y_{m5}[n]}{x[n]} = \frac{1}{5}\,\frac{1-e^{-j10\pi\lambda}}{1-e^{-j2\pi\lambda}} = \frac{\left(e^{j5\pi\lambda} - e^{-j5\pi\lambda}\right)e^{-j5\pi\lambda}}{5\left(e^{j\pi\lambda} - e^{-j\pi\lambda}\right)e^{-j\pi\lambda}}$

$= \frac{\sin(5\pi\lambda)}{5\sin(\pi\lambda)} e^{-j4\pi\lambda}$

$y_{m3}[n] = \frac{1}{3}\left(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)x[n] = \frac{z^{-1}}{3}\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)x[n] = \frac{z^{-1}(1-z^{-3})}{3(1-z^{-1})} x[n]$

$H_{m3}(\lambda) = \frac{y_{m3}[n]}{x[n]} = \frac{e^{-j2\pi\lambda}\, e^{-j3\pi\lambda}\left(e^{j3\pi\lambda} - e^{-j3\pi\lambda}\right)}{3\, e^{-j\pi\lambda}\left(e^{j\pi\lambda} - e^{-j\pi\lambda}\right)} = \frac{\sin(3\pi\lambda)}{3\sin(\pi\lambda)} e^{-j4\pi\lambda}$

d) $y[n] = \alpha\, y_{m5}[n] + \beta\, y_{m3}[n]$

e) **Donc** $H(\lambda) = \alpha\, H_{m5}(\lambda) + \beta\, H_{m3}(\lambda)$

$$\frac{\sin(5\pi\lambda)}{5\sin(\pi\lambda)} \approx 1 - \frac{24}{6}\pi^2\lambda^2 = 1 - 4\pi^2\lambda^2$$

$$\frac{\sin(3\pi\lambda)}{3\sin(\pi\lambda)} \approx 1 - \frac{8}{6}\pi^2\lambda^2 = 1 - \frac{4}{3}\pi^2\lambda^2$$

donc $$\alpha\frac{\sin(5\pi\lambda)}{5\sin(\pi\lambda)} + \beta\frac{\sin(3\pi\lambda)}{3\sin(\pi\lambda)} \approx (\alpha+\beta) - \left(4\alpha + \frac{4}{3}\beta\right)\pi^2\lambda^2$$

On voudrait que cela soit $\approx -4\pi^2\lambda^2$

Donc $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ 4\alpha + \frac{4}{3}\beta = 4 \end{cases}$ $\quad \beta = -\alpha \quad 4\alpha - \frac{4}{3}\alpha = 4$

$\frac{8}{3}\alpha = 4 \quad \alpha = \frac{12}{8} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$\beta = -\frac{3}{2} \qquad \alpha = \frac{3}{2}$