

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Adrien CURRIER

**Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes
dans les fibrés cotangents avec structure lc_s**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le « date »

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématique Jean Leray

Rapporteurs avant soutenance :

Mélanie BERTELSON Chargée de Cours à l'Université Libre de Bruxelles
Vincent HUMILIERE Professeur à Sorbonne Université

Composition du Jury :

	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Président :	Marie-Claude ARNAUD	Professeure à l'Université Paris Cité
Examineurs :	Jean-François BARRAUD	Professeur à l'Université de Toulouse
	Mélanie BERTELSON	Chargée de Cours à l'Université Libre de Bruxelles
	Vincent HUMILIERE	Professeur à Sorbonne Université
Dir. de thèse :	François LAUDENBACH	Professeur Emérite à Nantes Université
	Baptiste CHANTRAINE	Maître de Conférences à Nantes Université

Titre : Quelques outils pour l'étude des sous-variétés lagrangiennes dans les fibrés cotangents avec structure \mathcal{LCS}

Mot clés : géométrie, symplectique, localement conformément symplectique, lagrangienne

Résumé : La géométrie localement conformément symplectique (\mathcal{LCS}) est une généralisation de la géométrie symplectique dans laquelle une variété est munie d'une 2-forme non-dégénérée qui est localement une forme symplectique à un facteur positif près. Si les comportements locaux de telles variétés restent relativement similaires à ceux que l'on rencontre en géométrie symplectique, les comportements globaux peuvent néanmoins différer. Par exemple, nous pouvons étendre la définition des lagrangiennes à la géométrie \mathcal{LCS} , mais $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ possède une structure \mathcal{LCS} "exacte" donnée par la structure de contact canonique sur \mathbb{S}^3 . Cette "flexibilité" de la géométrie \mathcal{LCS} rend toutefois difficile l'étude de phé-

nomènes de rigidités et certains outils classiques, comme l'homologie de Floer, ne possèdent pas de version \mathcal{LCS} . Dans ce manuscrit, nous étudierons donc la rigidité des lagrangiennes exactes (\mathcal{LCS}) dans les cotangents de variétés fermés avec structure \mathcal{LCS} . Dans un premier temps, nous étudierons les limites d'une version \mathcal{LCS} du théorème d'Abouzaid-Kragh. En particulier, nous dégagerons de nouvelles stratégies pour l'étude des cordes de Reeb dans les espaces de jets. Dans un second temps, nous développerons une stratégie pour l'étude des points critiques de fonctions génératrices, aboutissant à un raffinement des inégalités de Chantraine-Murphy.

Title: A handful of tools for the study of Lagrangian submanifolds in cotangent bundles with \mathcal{LCS} structure

Keywords: geometry, symplectic, locally conformally symplectic, Lagrangian

Abstract: Locally conformally symplectic (\mathcal{LCS}) geometry is a generalization of symplectic geometry in which a manifold is endowed with a non-degenerate 2-form that is locally a symplectic form up to some positive factor. If the local behavior of such a manifold is largely identical to that of a symplectic manifold, the global behavior can nonetheless vastly differ. For example, while it is possible to define Lagrangian submanifolds in \mathcal{LCS} geometry, we also have to contend with the fact that $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ has a canonical "exact" \mathcal{LCS} structure given by the canonical contact form of \mathbb{S}^3 through a process known as circular \mathcal{LCS} -ization. However, \mathcal{LCS} geome-

try's "flexibility" makes the study of rigidity phenomena difficult and some of the classical tools, such as Floer homology, do not have a \mathcal{LCS} variant. In this manuscript, we will study the rigidity of exact (\mathcal{LCS}) Lagrangians in cotangent bundles of closed manifolds with \mathcal{LCS} structure. We will begin with the study of the limits of a \mathcal{LCS} version of the Abouzaid-Kragh theorem. In particular, we will see a new strategy for the study of Reeb chords in cotangent bundles. We will follow with a strategy for the study of critical points of generating functions, concluding with a refinement of Chantraine-Murphy's inequalities.