

# THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Gurvan MÉVEL**

## Propriétés asymptotiques des invariants tropicaux raffinés

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 23 septembre 2024  
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

### Rapporteur-euse avant soutenance :

Hannah MARKWIG Professeure, Universität Tübingen  
Eugenii SHUSTIN Professeur, Tel-Aviv University

### Composition du Jury :

	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Président :		
Examineur-ices :	Omid AMINI	Professeur, École Polytechnique
	Penka GEORGIEVA	Professeure, Sorbonne Université
	Marco GOLLA	Chargé de recherches, CNRS et Nantes Université
	Ilia ITENBERG	Professeur, Sorbonne Université
	Lucía LÓPEZ DE MEDRANO	Professeure, Universidad Nacional Autónoma de México
Dir. de thèse :	Erwan BRUGALLÉ	Professeur, Nantes Université

---

**Titre :** Propriétés asymptotiques des invariants tropicaux raffinés

**Mots clés :** Géométrie énumérative, géométrie tropicale, invariants tropicaux raffinés, diagrammes en étages, étude asymptotique, conjecture de Göttsche

**Résumé :** En géométrie algébrique énumérative, le nombre de courbes sur une surface se comporte différemment selon que l'on fixe le nombre de points doubles ou le genre des courbes : polynomial dans le premier cas, il croît plus vite qu'exponentiellement dans le second. Dans le premier cas la conjecture de Göttsche, prouvée par Tzeng, donne une formule universelle pour la série génératrice de ces nombres.

Les invariants tropicaux raffinés ont été introduits par Block et Göttsche. Ce sont des polynômes qui interpolent entre des problèmes énumératifs réels et complexes. Si un comportement polynomial de leurs coefficients est attendu et effectivement observé quand le nombre de points doubles est fixé, Brugallé

et Jaramillo-Puentes ont montré que certains de leurs coefficients varient également polynomialement lorsque le genre est fixé. Cette thèse prouve, dans l'esprit de la conjecture de Göttsche, des formules universelles pour les premiers coefficients des invariants tropicaux raffinés en genre 0 et 1.

Les méthodes utilisées relèvent de la géométrie tropicale. Introduits par Brugallé et Mikhalkin, les diagrammes en étages sont un outil qui transforme la question algébro-géométrique de départ en problème combinatoire. Dans cette thèse, on étudie précisément les diagrammes en étages qui interviennent asymptotiquement dans le calcul des invariants tropicaux raffinés, pour établir des formules universelles.

---

**Title:** Asymptotic properties of tropical refined invariants

**Keywords:** Enumerative geometry, tropical geometry, tropical refined invariants, floor diagrams, asymptotics, Göttsche conjecture

**Abstract:** In enumerative algebraic geometry, the number of curves on a surface behaves differently whether one fixes the number of nodes or the genus of the curves. It is polynomial in the first case, but grows more than exponentially fast in the second case. In the first case Göttsche conjecture, proven by Tzeng, gives a universal formula for the generating series of these numbers.

Tropical refined invariants were introduced by Block and Göttsche. They are polynomials that interpolate between real and complex enumerative questions. As expected, their coefficients behave polynomially when the number of nodes is fixed. However, Brugallé and

Jaramillo-Puentes proved that some of their coefficients are also polynomial when the genus is fixed. In this thesis we prove some universal formulas for the first coefficients of the tropical refined invariants in genus 0 and 1, in the spirit of Göttsche conjecture.

The techniques we use fall under the scope of tropical geometry. Introduced by Brugallé and Mikhalkin, floor diagrams are a tool that turns the starting algebro-geometric question into a combinatorial problem. In this thesis, we precisely describe the floor diagrams that asymptotically take part in the computation of tropical refined invariants. This allows to write down universal formulas.