

# THESE DE DOCTORAT

NANTES UNIVERSITE

ECOLE DOCTORALE N° 641

*Mathématiques et Sciences et Technologies du numérique,  
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : Informatique

Par

**Martin BAILLON**

## Continuity in Type Theory

Continuité en théorie des types

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 21 décembre 2023

Unité de recherche : Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N)

### Rapporteurs avant soutenance :

Thierry Coquand Full Professor, University of Gothenburg, Gothenburg.  
Andrej Bauer Full Professor, University of Ljubljana, Ljubljana.

### Composition du Jury :

Président : *(à préciser après la soutenance)*

Examineurs : Thierry Coquand Full Professor, University of Gothenburg, Gothenburg.  
Andrej Bauer Full Professor, University of Ljubljana, Ljubljana.  
Théo Winterhalter Chargé de recherche, Inria Saclay.  
Étienne Miquey Maître de Conférence des Universités, Institut de Mathématiques de Marseille.  
Vincent Rahli Associate Professor, University of Birmingham, Birmingham.  
Benjamin Werner Directeur de recherche, INRIA, détaché à l'École polytechnique, Palaiseau.  
Dir. de thèse : Assia Mahboubi Directrice de recherche, Inria Rennes-Bretagne-Atlantique.  
Co-dir. de thèse : Pierre-Marie Pédrot Chargé de recherche, Inria Rennes-Bretagne-Atlantique.

### Invité(s)

Ambrus Kaposi Associate Professor, Eötvös Loránd University, Budapest.

**Titre :** Continuité en théorie des types

**Mots clés :** Continuité, Théorie des types, Assistants à la preuve, Preuve de normalisation, modèles syntaxiques.

**Résumé :** Dans cette thèse, j'étudie l'interaction entre la théorie des types et la continuité, un concept mathématique formalisant l'intuition qu'une fonction ne peut interroger qu'une partie finie de son argument avant de renvoyer une valeur

Dans le premier chapitre, je décris la théorie des types et mon prisme de lecture : la correspondance preuve-programme, ou isomorphisme de Curry-Howard, qui affirme que calcul et preuve sont deux faces d'une même pièce. J'y explique comment la théorie des types bute encore sur l'intégration de principes dits classiques, comme l'axiome du choix ou le tiers-exclu.

Dans le deuxième chapitre, j'analyse les différentes définitions de la continuité, et comment celles-ci diffèrent les unes des autres d'un point de vue logique.

Dans le troisième chapitre, je présente une première tentative d'intégration de la continuité en théorie des types, à travers un modèle syntaxique d'une théorie des types particulières, appelée *Baclofen Type Theory*.

Enfin, dans le dernier chapitre, je détaille une théorie des types où toutes les fonctions sont continues, et présente des résultats préliminaires de normalisation de cette théorie.

**Title :** Continuity principles in Type Theory

**Keywords :** de 3 à 6 mots clefs

**Abstract :** In this thesis, I study the interaction between type theory and continuity, a mathematical concept describing the intuition that a function can only query a finite part of its argument before returning a value.

In the first Chapter, I describe type theory and my working paradigm: the proof-program correspondence, or Curry-Howard isomorphism, which asserts that computation and proof are two sides of the same coin. I explain how type theory is still struggling with the integration of so-called classical principles, such as the axiom of choice or the excluded-middle.

In a second part I survey the different definitions of continuity, and how they differ from each other from a logical point of view.

In the third Chapter I present a first attempt to mingle continuity and type theory, through a syntactic model of a particular type theory, dubbed *Baclofen Type Theory*.

Finally, in the last Chapter I define a type theory where all functions are continuous, and present preliminary results on the proof of its normalisation.