

# THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Ludovic MARTAUD**

**Schémas aux volumes finis avec inégalités d'entropie discrètes  
pour des systèmes hyperboliques non linéaires.**

**Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)**

## **Rapporteurs avant soutenance :**

Rémi ABGRALL Full professor, Universität Zürich  
Marie-Hélène VIGNAL Maître de conférences, Université Paul Sabatier

## **Composition du Jury :**

	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Président :	Rémi ABGRALL	Full professor, Universität Zürich
Examineurs :	Marie-Hélène VIGNAL	Maître de conférences, Université Paul Sabatier
	Rodolphe TURPAULT	Professeur des universités, Bordeaux INP
	Marianne BESSMOUILIN-CHATARD	Chargée de recherche, CNRS, Nantes Université
	Nicolas CROUSEILLES	Directeur de recherche, INRIA, Rennes
Dir. de thèse :	Christophe BERTHON	Professeur des universités, Nantes Université
Co-dir. de thèse :	Mehdi BADSI	Maître de conférences, Nantes Université

**Titre :** Schémas aux volumes finis avec inégalités d'entropie discrètes pour des systèmes hyperboliques non linéaires.

**Mot clés :** Systèmes hyperboliques, schémas volume finis, inégalités d'entropie discrètes, schémas *well-balanced*, schémas d'ordre élevé

**Résumé :** Ce mémoire de thèse concerne le développement de schémas numériques aux volumes finis qui approchent les solutions de systèmes d'équations hyperboliques non linéaires. Ces schémas doivent respecter des critères de stabilité considérés au sens des inégalités d'entropie discrètes et des critères de précisions tels que des propriétés *well-balanced* ou d'ordre élevé. L'obtention d'une inégalité d'entropie discrète locale est proposée sous la forme de conditions suffisantes directement introduites dans la définition des schémas numériques. Cette approche est ap-

pliquée aux cas des systèmes d'Euler, de Saint Venant et de Ripa. Pour ces deux derniers systèmes, les schémas entropiques proposés sont complétés d'une propriété *well-balanced*. Par ailleurs, des schémas d'ordre élevé, sans limiteurs de pente et qui vérifient une inégalité d'entropie discrète globale sont également proposés pour un système hyperbolique quelconque. Ces schémas sont définis en une dimension d'espace et des extensions sur des maillages non structurés bi-dimensionnels sont également réalisées.

**Title:** Discrete entropy inequalities of finite volume schemes for nonlinear hyperbolic systems

**Keywords:** Hyperbolic systems, finite volume schemes, discrete entropy inequalities, well-balanced schemes, high-order schemes

**Abstract:** This thesis concerns finite volume schemes which approximate the solutions of non linear hyperbolic system of equations. These schemes have to satisfy stability criteria in the sense of discrete entropy inequalities and accuracy criteria such as well-balanced or high-order properties. Sufficient conditions are proposed to ensure a fully discrete local entropy inequality in the definition of numerical schemes. These conditions are used to

design numerical schemes for the Euler, the Shallow Water and the Ripa systems. For the two last systems, the entropic schemes are completed to guarantee a well-balanced property. In the other hand, high-order non limited finite volume schemes are also proposed. These schemes satisfy a fully discrete global entropy inequality in one-dimensional space and their extensions on two-dimensional unstructured meshes are also done.